



TITLE:

波動方程式によって支配される波の障害物による散乱の逆問題における囲い込み法 (偏微分方程式の解の幾何)

AUTHOR(S):

池畠, 優

CITATION:

池畠, 優. 波動方程式によって支配される波の障害物による散乱の逆問題における囲い込み法 (偏微分方程式の解の幾何). 数理解析研究所講究録 2013, 1850: 90-114

ISSUE DATE:

2013-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/195123>

RIGHT:

波動方程式によって支配される波の障害物による 散乱の逆問題における囲い込み法

The enclosure method and extracting geometry of an
obstacle using the dynamical scattering data

池 嶋 優 (Masaru IKEHATA)*

概 要

この論文では, 波動方程式によって支配される波の障害物による散乱の逆問題における囲い込み法を用いた最新の結果について概観する.

目 次

1	序	2
2	送受信場所が同一の場合 (後方散乱データあるいは Monostatic Data)	3
2.1	最短距離と境界条件の違いの抽出	4
2.2	最初の反射点の抽出	6
2.3	指示関数の主要項の抽出	8
2.4	曲率の抽出	9
3	送受信場所が異なる場合 (Bistatic data)	10
3.1	最短伝搬距離の抽出	12
3.2	2 点間の最初の反射点の抽出	15
3.3	Bistatic data を用いた指示関数の主要項の抽出	17
3.4	Bistatic data を用いた曲率の抽出	20
3.5	球状物体の再構成公式	21
4	今後の問題	21

*ikehatagunma@gmail.com, Department of Mathematics, Graduate School of Engineering, Gunma University, Kiryu 376-8515, Japan

1 序

有限の速さで波が媒質中を伝わっていく様子を記述する方程式で最も重要なのはおそらく波動方程式 $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ であろう。この論文では、この方程式を3次元のある有界領域 D の外部で $t=0$ から $t=T$ まで考え、解 $u = u(x, t)$ は $t=0$ で初期条件そして D の境界上では同次境界条件を満たすものを考える。ただし、従来の散乱理論の枠組みと異なり、常に $0 < T < \infty$ とする。これはすなわち解の $t \rightarrow \infty$ における挙動を一切使用しないことを意味する。したがって $t \rightarrow \infty$ における解の減衰などの性質は我々には無関係である。

我々が考える逆問題は極めて素朴である。 D の外部に有界な台を持つ初期データを与え、それに対する解 u を同じく D の外部のある場所で $t=0$ から $t=T$ まで観測して、 D の存在する場所および形状についての情報を抽出すること。

物体からあまり離れていないところに有界な台を持つ初期データによって解を生成しその解の物体からあまり離れていない場所で解の値を観測する。これが時間無限大で減衰するか否かはよく研究されているが不思議なことに有限時間に限った観測値から物体の形状や位置を抽出する問題の研究になった途端一意性の問題に限っても見られない。例えば Rakesh の物体散乱の逆問題の解の一意性についての研究 [40, 41] を見ると、そこでは入射波は一つの方角に進む平面に特異性を持つものしか扱っていない。今の場合は初期データによって発生した特異性は空間の全方向に広がるので明らかに問題が異なる。波動方程式の解の時間無限大での減衰についてのおびただしい研究を眺めているとどうしても彼の問題設定が順問題の逆に見えない。Majda の研究 [36, 37] も結局は一つの方角に進む平面に特異性をもった入射波の物体による散乱波の解析を基礎にしている。点源の重ね合わせの場合については、‘Also, it is obvious that more general incoming functions such as superpositions of point sources could be used in our analysis’ とその論文の本文の最後 ([36] の p.290) に書いてあるのみである。この方向の最近の結果の概要については [39] があるが同じ状況である。他の論文でも平面波を入射波としてまず研究をするが点源になった途端同じように出来るあるいは今後の課題だろうということが終わっているのが多い。確かに点源は平面波分解を通して空間の各方向へ進む平面波の重ね合わせとして書けるがそれは無限個の連続的な重ね合わせであり、一つの平面波に対する結果からその無限個の重ね合わせに飛躍するのは実際に個々に確認しなければわからないと思う。これらは時間領域についての話であったが、いわゆる周波数領域においても同様な事態が生じている。多角形状の物体の固定波数かつ一つの入射方向を持つ平面波の散乱の逆問題については、一意性の研究は大きく進展したのであるが ([6] およびその文献), [21] で指摘したように、点源入射波を用いた場合については実は部分的結果があるのみである。これを見ると、一つの入射波の障害物による散乱の逆問題は、入射波が指向性がない方が難しいのではないか。

本論文では、この問題の囲い込み法 (The Enclosure Method) による扱いについての最新の結果について概観する。なおこの論文で用いる囲い込み法は、‘一つの初期データ’により発生した波を用いて D についての情報を抽出するものであり、その原型は Laplace 方程式に対する境界値逆問題を扱った [9] で展開された方法に遡り弾性体の方程式系へもその適用範囲が拡大されている [28]。この方法の固定波数における波の障害物による散乱の逆問題における研究は、空間2次元で薄い線状物体を扱った [13]、折れ線や多角形状の物

体を扱った [14, 15] がある。最新の研究については [21, 23, 30] を参照されたい。固定波数における無限に多くの入射波に対する反射波を観測して得られる散乱データを用いた囲い込み法は [11] に遡る。そこでは sound-soft obstacle が扱われており、出版年が早い [10] では sound-hard obstacle, そして [16] では impedance boundary condition が扱われている。この方向の最近の研究では, [10] での曲率の条件を外した [42], Maxwell 方程式系について論じた [43] を参照されたい。なおこのデータを用いて D そのものの再構成公式をもたらす方法として筆者の提出した探針法 (The Probe Method) がある。その詳細については [12, 16, 22] を参照されたい。

なお, 今後は特に断らなければ, D は \mathbf{R}^3 の空でない有界な開集合で, $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$ は連結, ∂D は C^2 であるとする。 ν で ∂D 上の外向き単位法線ベクトル場をあらわす。 $r > 0$ および $x \in \mathbf{R}^3$ に対して $B_r(x)$ は x を中心として半径が r の開球そしてその境界 $\partial B_r(x)$ を $S_x(r)$ と書く。 集合 $A \subset \mathbf{R}^3$ の凸包を $[A]$ で表す。

2 送受信場所が同一の場合 (後方散乱データあるいは Mono-static Data)

この節では次の問題を考える。 $\text{supp } f \cap \overline{D} = \emptyset$ を満たす $f \in L^2(\mathbf{R}^3)$ に対し $u = u_f(x, t)$ は次の初期境界値問題の解であるとする。

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \text{ in } (\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}) \times]0, T[,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \gamma u_t - \beta u = 0 \text{ on } \partial D \times]0, T[,$$

$$u(x, 0) = 0 \text{ in } \mathbf{R}^3 \setminus \overline{D},$$

$$\partial_t u(x, 0) = f(x) \text{ in } \mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}.$$

ここで $\gamma = \gamma(x)$ および $\beta = \beta(x)$, $x \in \partial D$ は $L^\infty(\partial D)$ に属し特に $\gamma(x) \geq 0$ a. e. $x \in \partial D$ を仮定する。この最後の仮定は, 波のエネルギーが物体の表面上で失われる場合を想定している。さらに, 形式的計算によれば

$$E(t) = \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) dx + \int_{\partial D} \beta(x) |u|^2 dS$$

とおくと

$$E'(t) = -2 \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}} \gamma(x) |\partial_t u|^2 dS$$

となるので $\gamma(x) \geq 0$ a.e. $x \in \partial D$ は $E(t)$ が単調非増加であることを意味することも注意しよう。ただし β については符号の制限は全く課していないことも注意する。

このとき u はしかるべき関数空間の中に属する弱解としてただ一つ存在する ([5])。

この論文では, $\overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset$ を満たす開球 B の特性関数で f を与える:

$$f(x) = \chi_B(x).$$

当然 B の中心 p は $p \in \mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$ を満たし, B の半径 η は $0 < \eta < d_{\partial D}(p) \equiv \inf_{y \in \partial D} |p - y|$ を満たしている. この f は Dirac の delta 関数 $\delta(x - p)$ の不連続性に重点を置いたかなり荒い‘近似’と考えればよい. 初期データが $L^2(\mathbf{R}^3)$ に属してかつ不連続性をもっていることが重要で, 軟化子では不連続性がないことを注意しよう.

さて波を B 上 $t = 0$ から $t = T$ まで観測して得られるデータ $u_f(x, T), (x, t) \in B \times]0, T[$ を (p を中心とする) 後方散乱データ (あるいは monostatic data) と呼ぶことにする.

この節で考える問題は次のように述べられる.

問題 1. D, γ および β はすべて未知であるとする. 後方散乱データから D の存在する場所およびその形状についての情報を抽出せよ.

得られた結果を幾何学的に表現すると次の通り.

- その外部が D を囲む p を中心とする球面のうち最大なものの S の抽出.
- 点 p から与えられた方向 ω へ少し進んだ点を中心とした後方散乱データを用いて ω 方向にさらに進んだ先に $S \cap \partial D$ に属する点が存在するかどうかを判定する方法およびその点における ∂D の外向き単位法線ベクトルの抽出.
- $\gamma = \beta = 0$ の下で, $S \cap \partial D$ の各点 q において, q と p を結んだ線分上 p から q 方向へ少し進んだ 2 点を中心とした 2 つの後方散乱データからの Gauss 曲率および平均曲率の抽出.

以下の部分節でこれらを順に追って説明しよう.

2.1 最短距離と境界条件の違いの抽出

γ については次の場合のみを考える:

- 正の定数 C が存在して次の (A1) または (A2) が成り立つ.

(A1) $\gamma(x) \leq 1 - C$ a.e. $x \in \partial D$.

(A2) $\gamma(x) \geq 1 + C$ a.e. $x \in \partial D$.

これは結果としてこう分けることになったが, 空間一次元の場合 $\gamma = 1$ かつ $\beta = 0$ のときおよびそのときに限り物体は‘見えなくなり’, $\gamma = 1$ は特別な位置を占めている ([25]). この状況を D が半空間 $x_3 < 0$ で γ が定数かつ $\beta = 0$ の場合について見よう. ‘簡単のため’ 入射波は $d = (d_1, d_2, d_3) \in S^2$ 方向に速さ 1 で進む平面波とする:

$$u_i(x, t) = e^{ikx \cdot d} e^{-ikt}.$$

これは波動方程式 $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ を $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ で満たす. 次に ∂D 上の境界条件 $\partial_t u - \gamma \partial_n u = 0$ の下での u_i を入射波としたときの反射波 u_r を

$$u_r(x, t) = R e^{ikx \cdot d'} e^{-ikt}$$

という形で求める. ただし R は定数, $\nu = (0, 0, 1)$ および $d' \in S^2$ である. したがって $u = u_i + u_r$ はもちろん波動方程式 $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ を $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ で満たす. 簡単な計算で

$$d' = (d_1, d_2, -d_3)$$

および

$$R = \frac{d_3 + \gamma}{d_3 - \gamma}$$

ととれば境界条件 $\partial u / \partial \nu - \gamma \partial_t u = 0$ も満たされることがわかる。さて ∂D に垂直な $d = (0, 0, -1)$ 方向から平面波を入射したときの反射波の振幅を見ると $d_3 = -1$ より

$$R = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}$$

となる。よって $\gamma = 1$ のときこれは 0 になり上のような形の反射波は発生しないことになる。おそらく指向性がない入射波の場合においても、最初に物体の表面にぶつかる点では、近似的にその点における外向き法線方向に逆向きの入射方向の平面波とみれて、そうすると、その点で $\gamma = 1$ の場合、発生した反射波は‘弱く’なり、その点における物体についての情報が奥に隠れるのではないか。これが、 $\gamma = 1$ の場合は特別であろうしたがって (A1)/(A2) のような分類が出てくるのは自然であると考えの根拠である。なお $\gamma = 1$ の場合どうなるかについては、我々の問題設定における研究については上でも指摘したように [25], 散乱核に対しては [7] を参照されたい。

さて波動方程式によって支配される波の散乱の逆問題における囲い込み法は次の二つからなる。

まず u_f の変換

$$w(x) = w_f(x, \tau) = \int_0^T e^{-\tau t} u_f(x, t) dt, \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}, \quad \tau > 0 \quad (2.1)$$

を導入する。この変換の囲い込み法における使用は [17] に遡る。

次に初期データ f に依存して変形 Helmholtz 方程式¹ の特別な解を用意する。今の場合 $v = v_f(\cdot, \tau) \in H^1(\mathbf{R}^3)$ は次の問題の弱解とする：

$$(\Delta - \tau^2)v + f = 0 \text{ in } \mathbf{R}^3. \quad (2.2)$$

[20] で最初に導入された、この f に依存して v をとるという idea は、熱方程式を扱った [32] でも形を変えて使用された。

そして $\tau > 0$ の関数

$$\tau \mapsto \int_B (w_f - v_f) dx$$

を導入する。これを指示関数と呼ぶ。指示関数は w_f の B における値したがって u_f の $B \times]0, T[$ における値から原理的には計算可能である。次の定理は指示関数の $\tau \rightarrow \infty$ における漸近挙動に関する主張である。

定理 2.1([25]). T は

$$T > 2 \text{dist}(D, B) \quad (2.3)$$

を満たすとせよ。

もし (A1)/(A2) が満たされているならば、十分大きい $\tau_0 > 0$ をとると $\tau \geq \tau_0$ を満たすすべての τ に対して

$$\pm \int_B (w_f - v_f) dx > 0 \quad (2.4)$$

¹ the modified Helmholtz equation の和訳である。

が成り立つ. ただし (2.4) において, (A1) のときは + を (A2) のときは - をとる. さらに (A1), (A2) のどちらにおいても公式

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \log \left| \int_B (w_f - v_f) dx \right| = -\text{dist}(D, B) \quad (2.5)$$

が成り立つ.

定理 2.1 における v は

$$v(x) = v_f(x, \tau) = \frac{1}{4\pi} \int_B \frac{e^{-\tau|x-y|}}{|x-y|} dy \quad (2.6)$$

と陽に書ける. よって v は原理的には計算可能である.

(2.4) の意味するところは, γ が小さいか ((A1)) 大きい ((A2)) の場合は, その違いを指示関数の符号で判定できるということである. 表面の状態が γ に反映しているはずであるからその違いを後方散乱データを使って判別できるのである.²

$w = w_f$ の満たす方程式は

$$(\Delta - \tau^2)w + f = e^{-\tau T}(u_t(x, T) + \tau u(x, T)) \text{ in } \mathbf{R}^3 \setminus \overline{D},$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = (\gamma(x)\tau + \beta(x))w + e^{-\tau T}\gamma(x)u(x, T) \text{ on } \partial D$$

となるのであるが, 未知の非同次項が現れている. これら非同次項の存在は未知の物体の存在についての情報を隠すように見える. しかし実際は, 囲い込み法の使用は, T が十分大きければ, これらの障害を問題とせず, 物体の存在についての情報を抽出することを可能にするということである.

証明において特筆すべき点は, もともとの解 u_f の形状などの詳しい情報を使うのではなく, 変換した w_f の満たす方程式を利用した部分積分の方法のみでなされる点である. よって他のさまざまな問題に適用可能であるだろう.

さらに言うならば γ については滑らかさは全く仮定しておらず, これも我々の方法の大きな利点であろう. Lax-Phillips の散乱理論における逆問題を扱った [36] においては γ は滑らかであるとしている.

2.2 最初の反射点の抽出

$\text{dist}(D, B) = d_{\partial D}(p) - \eta$ であるのを見るのは容易である. したがって, (2.5) は後方散乱データから, B の中心 p と ∂D との最短距離を抽出する. よって p を中心として (2.5) を使って求められた半径 $d_{\partial D}(p)$ の球面 $S_p(d_{\partial D}(p))$ を描けば, その上のどこかに ∂D 上の点

² 鴨川シーワールドのシロイルカベルーガは目隠した状態で前方に離れておかれた板上の物体がプラスチックか金属かを音波を頭部から前方方向へ発しその板からの反射波を顎の骨の部分で受信して区別するという. 筆者はこれを目の前で見て感動したのであるが, (2.4) に相当することをベルーガはその頭の中でしていると考えると面白いのではないか.

が存在する。その点は、点 p で発生した仮想的な球面波が ∂D に初めて当たる点と解釈できる。これを我々は $\Lambda_{\partial D}(p)$ であらわそう：

$$\Lambda_{\partial D}(p) = \{y \in \partial D \mid d_{\partial D}(p) = |y - p|\}.$$

この集合を知ることは、どこに最初の反射点が存在するかを知ることであり、重要な情報である。これを囲い込み法を用いて一つの B に対する後方散乱データから抽出できるか大変興味深い問題である。現在のところ、2節で述べる Dirichlet 境界条件のみしか得られておらずこの節の境界条件の場合については現在未解決である。

ここでは点 p を固定して、 $d_{\partial D}(p)$ は既知として、点 p のまわりで無限個の球 U をとってそれに対する後方散乱データから $\Lambda_{\partial D}(p)$ を抽出できることを示す。なおもし $q \in \Lambda_{\partial D}(p)$ がわかれば、 $\nu_q = (p - q)/|q - p|$ として ∂D の q における外向き単位法線ベクトルも得られる。したがって、 q における ∂D の接平面も得られることを注意しよう。 ∂D の q における‘線形近似’がわかるのである。

$0 < s < d_{\partial D}(p)/2$ を満たす s を与える。さらに方向 $\omega \in S^2$ を与え p から ω 方向へ s だけ進んだ点 $p + s\omega$ を中心とした半径 $\eta/2$ の開球 $B_{\eta/2}(p + s\omega)$ を考える。 $\overline{B}_{\eta/2}(p + s\omega) \subset B_{d_{\partial D}(p)}(p)$ が成り立ちしたがって $\overline{B}_{\eta/2}(p + s\omega)$ は $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$ に含まれることに注意しよう。

次の命題は、 $d_{\partial D}(p)$ が分かっているとき、 p から ω 方向へ $d_{\partial D}(p)$ だけ進んだときに ∂D の点があるかどうかを、 $p + s\omega$ を中心とする後方散乱データを使って判定する方法の根幹を与える。

命題 2.1([26]). もし $p + d_{\partial D}(p)\omega \in \partial D$ ならば $d_{\partial D}(p + s\omega) = d_{\partial D}(p) - s$ 。もし $p + d_{\partial D}(p)\omega \in \partial D$ でないならば、 $d_{\partial D}(p + s\omega) > d_{\partial D}(p) - s$ 。

証明は省略する。

この命題より $\Lambda_{\partial D}(p)$ の特徴づけ

$$\Lambda_{\partial D}(p) = \{p + d_{\partial D}(p)\omega \mid d_{\partial D}(p + s\omega) = d_{\partial D}(p) - s, \omega \in S^2\} \quad (2.7)$$

を得る。したがってすべては $d_{\partial D}(p + s\omega)$ をどう抽出するかである。

この手続きは、 $f = \chi_{B_{\eta/2}(p + s\omega)}$ のときの公式 (2.5) を使って

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \log \left| \int_{B_{\eta/2}(p + s\omega)} (w_f - v_f) dx \right| = -\text{dist}(D, B_{\eta/2}(p + s\omega)) \quad (2.8)$$

より $\text{dist}(D, B_{\eta/2}(p + s\omega))$ を抽出し $\text{dist}(D, B_{\eta/2}(p + s\omega)) = d_{\partial D}(p + s\omega) - \eta/2$ より $d_{\partial D}(p + s\omega)$ を計算するということから成る。ただし (2.8) を使うには T は

$$T > 2\text{dist}(D, B_{\eta/2}(p + s\omega))$$

を満たしていなければならない。

以上をまとめると次の定理を得る。

定理 2.2. D, γ および β は未知とし、 γ は (A1) または (A2) を満たすとせよ。 $d_{\partial D}(p)$ は既知とせよ。 T は

$$T > 2 \sup_{\omega \in S^2} \text{dist}(\partial D, B_{\eta/2}(p + s\omega)) \quad (2.9)$$

を満たすとせよ. このとき, 固定した $0 < \eta < d_{\partial D}(p)$, $s \in]0, d_{\partial D}(p)/2[$ およびすべての $\omega \in S^2$ に対する $f = \chi_{B_{\eta/2}(p+s\omega)}$ に対応する u_f の $B_{\eta/2}(p+s\omega) \times]0, T[$ における値から $\Lambda_{\partial D}(p)$ のすべての点およびその点における ∂D の外向き単位法線ベクトルを抽出できる.

(2.9) は, ‘ T は十分大きい’ ぐらいにラフに解釈すればよい (ただし, あくまで T は有限!).

2.3 指示関数の主要項の抽出

定理 2.1 の公式 (2.5) をみれば誰でもこの先を考えたくなるはずである. それは

$$e^{2\tau \text{dist}(D,B)} \int_B (w_f - v_f) dx$$

の $\tau \rightarrow \infty$ における漸近形とくにその主要項を決定せよという問題である. その係数に $\Lambda_{\partial D}(p)$ の各点における ∂D の幾何についての情報が入っているはずである.

結果を述べるためにいくつか記号を導入する.

各 $q \in \Lambda_{\partial D}(p)$ に対して λ の 2 次多項式

$$P_{\partial D}(\lambda; q) = \lambda^2 - 2H_{\partial D}(q)\lambda + K_{\partial D}(q) \quad (2.10)$$

を導入する. ここで $K_{\partial D}(q)$ および $H_{\partial D}(q)$ はそれぞれ ∂D の q における Gauss 曲率および (ν_q に関する) 平均曲率である.

さらに $k_1(q)$ および $k_2(q)$ で ∂D の q における (ν_q に関する) 主曲率を表す ([8]). このとき $K_{\partial D}(q) = k_1(q)k_2(q)$ および $H_{\partial D}(q) = (k_1(q) + k_2(q))/2$ であり因数分解

$$P_{\partial D}(\lambda; q) = (\lambda - k_1(q))(\lambda - k_2(q)) \quad (2.11)$$

を得る. q は ∂D 上 $d_{\partial D}(p) = |q - p|$ を満たすことに注意すると $k_j(q) \leq 1/d_{\partial D}(p)$, $j = 1, 2$ が成り立ち, したがって $P_{\partial D}(1/d_{\partial D}(p); q) \geq 0$ を得る.

次の定理は指示関数の $\tau \rightarrow \infty$ における漸近形の主要項を明示し, $\Lambda_{\partial D}(p)$ の各点における ∂D の幾何についての情報が後方散乱データに含まれていることを主張している.

定理 2.3. $\gamma(x) = \beta(x) = 0$ a. e. $x \in \partial D$ とせよ. ∂D は C^3 , $\Lambda_{\partial D}(p)$ は有限個の点からなり

$$P_{\partial D}(1/d_{\partial D}(p); x) > 0, \forall x \in \Lambda_{\partial D}(p) \quad (2.12)$$

を満たすとせよ.

このとき, (2.3) を満たす T に対して公式

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^4 e^{2\tau \text{dist}(\partial D, B)} \int_B (w_f - v_f) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\text{diam } B}{2d_{\partial D}(p)} \right)^2 \sum_{x \in \Lambda_{\partial D}(p)} \frac{1}{\sqrt{P_{\partial D}(1/d_{\partial D}(p); x)}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

が成り立つ.

証明は, [26] の方法を外部問題に適用して全く同じようにして得られる. 鍵はいわゆる反射解の主要項 ϵ_f^0 のエネルギーの漸近挙動と v_f の D におけるエネルギーが $\tau \rightarrow \infty$ のとき同等であることを示すことである:

$$\int_{\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}} (|\nabla \epsilon_f^0|^2 + \tau^2 |\epsilon_f^0|) dx \sim \int_D (|\nabla v_f|^2 + \tau^2 |v_f|) dx.$$

ここで $\epsilon_f^0 \in H^1(\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D})$ は次の外部問題の解である:

$$(\Delta - \tau^2) \epsilon_f^0 = 0 \text{ in } \mathbf{R}^3 \setminus \overline{D},$$

$$\frac{\partial \epsilon_f^0}{\partial \nu} = -\frac{\partial v_f}{\partial \nu} \text{ on } \partial D.$$

この証明は [35] で展開されている二つの型の reflection argument のうちの一つを適用することでなされる. 要となるアイデアは ∂D の近傍で ϵ_f^0 の '近似' を ∂D に関する v_f の折り返しを使って構成することである. この方法の利点は, 最大値原理は一切使用しないので他の境界条件への適用可能性がある点である. 詳しくは [35] および [26] の Appendix を参照されたい.

(2.13) にあらわれる各 $x \in \Lambda_{\partial D}(p)$ における量 $P_{\partial D}(1/d_{\partial D}(p); x)$ の意味について述べる. $S_x(S_p(d_{\partial D}(p)))$ および $S_x(\partial D)$ で x における $S_p(d_{\partial D}(p))$, ∂D の ν_x に関する Shape operator (or Weingarten map) を表す. このとき x において $S_p(d_{\partial D}(p))$ および ∂D それぞれの接平面は一致すること; $S_x(S_p(d_{\partial D}(p))) = (1/d_{\partial D}(p))I$; $S_x(\partial D)$ の固有値は $k_1(p)$ および $k_2(p)$ であることに注意すると

$$\det(S_x(S_p(d_{\partial D}(p))) - S_x(\partial D)) = P(1/d_{\partial D}(p); x) \quad (2.14)$$

を得る. したがって (2.12) は $S_x(S_p(d_{\partial D}(p))) - S_x(\partial D)$ が共通の x における接空間上の 2 次形式として正定値であることを意味する. そして $P(1/d_{\partial D}(p); x)$ は x における $S_p(d_{\partial D}(p))$ と ∂D の幾何の 'ずれ' を表すと考えられる. p を中心とする球面を使って ∂D の幾何を探索しているのである.

2.4 曲率の抽出

この部分節では (2.13) の応用を述べよう.

次の定理は, $q \in \Lambda_{\partial D}(p)$ が既知であるとして (したがって $d_{\partial D}(p) = |q - p|$ も既知), q における ∂D の Gauss 曲率および平均曲率 (すなわち主曲率すべて) を p から q 方向へ少し進んだ 2 点それぞれを中心とした後方散乱データから抽出できることを主張する. 証明は内部問題を扱った [26] の中の定理 5.1 の考えを適用して得られる.

定理 2.4. $\gamma(x) = \beta(x) = 0$ a.e. $x \in \partial D$ とせよ. $q \in \Lambda_{\partial D}(p)$ は既知であるとする. $0 < s_1 < s_2 < d_{\partial D}(p)/2$ を満たす s_1, s_2 を与える. $T > 2 \max_{j=1,2} \text{dist}(\partial D, B_{\eta/2}(p + s_j(q-p)/|q-p|))$ とせよ. このとき, $s = s_1, s_2$ に対する $f = \chi_{B_{\eta/2}(p+s(q-p)/|q-p|)}$ を初期データとして与えたときの u_f の $B_{\eta/2}(p + s(q-p)/|q-p|) \times]0, T[$ における値から $H_{\partial D}(q)$ および $K_{\partial D}(q)$ を抽出できる.

証明は次のとおり. 定理 2.3 を適用したいのだが q のみにおける情報を取りだすためには (2.13) そのままではだめである. しかし p から q 方向へ少し進んだ点 $p + s(q-p)/|q-p|$ においては簡単な考察で

$$\Lambda_{\partial D}(p + s(q-p)/|q-p|) = \{q\}$$

となることがわかる. しかもこのとき命題 2.1 により $d_{\partial D}(p + s(q-p)/|q-p|) = d_{\partial D}(p) - s$ したがって $d_{\partial D}(p + s(q-p)/|q-p|) < d_{\partial D}(p)$ となり, $S_q(S_{p+s(q-p)/|q-p|}(d_{\partial D}(p) - s)) - S_q(S_p(d_{\partial D}(p)))$ は正定値となる. いつでも $S_q(S_p(d_{\partial D}(p))) - S_q(\partial D) \geq 0$ であるから $S_q(S_{p+s(q-p)/|q-p|}(d_{\partial D}(p) - s)) - S_q(\partial D)$ は正定値であることが結論される. よって定理 2.3 の条件 (2.12) が p を $p + s(q-p)/|q-p|$ で置き換えた場合に成り立っていることがわかった.

よって (2.13) により

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^4 e^{2\tau \text{dist}(\partial D, B_{\eta/2}(p+s(q-p)/|q-p|))} \int_{B_{\eta/2}(p+s\nu_q)} (w_f - v_f) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\text{diam } B_{\eta/2}(p + s(q-p)/|q-p|)}{2(d_{\partial D}(p) - s)} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{P_{\partial D}(1/(d_{\partial D}(p) - s); q)}} \end{aligned}$$

を得る. $\text{dist}(\partial D, B_{\eta/2}(p + s(q-p)/|q-p|))$ は既知であることに注意しよう. 以上より次の二つの数を得たことになる:

$$Q(s_1) = P_{\partial D}(1/(d_{\partial D}(p) - s_1); q),$$

$$Q(s_2) = P_{\partial D}(1/(d_{\partial D}(p) - s_2); q).$$

(2.10) に注意してこれを $K_{\partial D}(q)$ および $K_{\partial D}(q)$ に関する連立一次方程式系とみると

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{d_{\partial D}(p) - s_1} & 1 \\ -\frac{2}{d_{\partial D}(p) - s_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{\partial D}(q) \\ K_{\partial D}(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(s_1) - \left(\frac{1}{d_{\partial D}(p) - s_1} \right)^2 \\ Q(s_2) - \left(\frac{1}{d_{\partial D}(p) - s_2} \right)^2 \end{pmatrix}$$

を得る. これは一意的に解ける.

定理 2.4 は $q \in \Lambda_{\partial D}(p)$ における ∂D の Gauss 曲率および平均曲率を p の近くの p と q を結んだ線分上の異なる 2 点を中心として波を発生させその同じ場所で波を観測することによって計測 (遠隔的に) する手段を与えている. 曲面の曲率を波動現象を使って完全に知ることが出来るのである. したがって q の近くでの ∂D の ‘形状’ を近似的に (2 次の近似) 知ることができる.

3 送受信場所が異なる場合 (Bistatic data)

この節では波の送信場所と受信場所が一般的に異なる場合について論じる. このような設定は, ソナーとかレーダー等で良く見られるものである (例えば [3, 4]). 当然見えるものが異なってくることが期待される.

残念ながら物体の表面における波の境界条件が前節の場合、まだ結果はない。ここでは境界条件を $u = 0$ とした場合 (sound-soft obstacle) における筆者の最新の結果について解説する ([27]).

波 $u = u_f(x, t)$ は次の初期境界値問題の弱解である ([5]):

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \text{ in } (\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}) \times]0, T[,$$

$$u = 0 \text{ on } \partial D \times]0, T[,$$

$$u(x, 0) = 0 \text{ in } \mathbf{R}^3 \setminus \overline{D},$$

$$\partial_t u(x, 0) = f(x) \text{ in } \mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}.$$

ここで f は前節と同じ B の特性関数とする。一方 $\overline{B'} \cap \overline{D} = \emptyset$ を満たすもう一つの開球 B' を任意に与える。 B' の中心を p' 、半径を η' であらわす。 $p' \in \mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$ および $\eta' < d_{\partial D}(p')$ が成り立っていることに注意しよう。 $p = p'$ やとくに $B = B'$ の場合も含まれていることも注意しよう。

さて波を B' 上 $t = 0$ から $t = T$ まで観測して得られるデータ $u_f(x, T)$, $(x, t) \in B' \times]0, T[$ を (p と p' を中心とする) Bistatic data と呼ぶことにする。

この節で考える問題は次のように述べられる。

問題 2. p と p' を固定する。 Bistatic data から D の存在する場所およびその形状についての情報を抽出せよ。

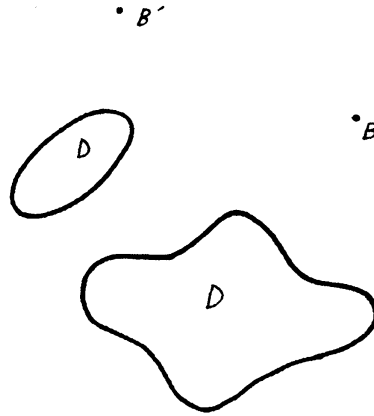


図 1: 問題 2 を $\overline{B} \cap \overline{B'} = \emptyset$ の場合に説明する図。

[27] で得られた結果を幾何学的に表現すると次の通り。

- その外部が D を囲む p と p' を焦点とする回転楕円面のうち最大なもの E の抽出。
- $E \cap \partial D$ に属する点すべておよびそれらの点における外向き単位法線ベクトルの抽出。
- D が凸であるという仮定の下で、 $E \cap \partial D$ の各点における Gauss 曲率および $p = p'$ のときには消える付加項がついた平均曲率の抽出。

ただし B と B' の D に対する配置は任意ではなく, \bar{B} と \bar{B}' の和集合を含む最小の凸集合と \bar{D} が共通点を持たないという仮定をつけている.

以下の部分節でこれらを順に追って説明しよう.

3.1 最短伝搬距離の抽出

(2.1) と同じように次の $x \in \mathbf{R}^3 \setminus \bar{D}$ の関数を導入する:

$$w_f(x; \tau) = \int_0^T e^{-\tau t} u_f(x, t) dt, \quad \tau > 0.$$

$w = w_f$ は次の外部問題の解である:

$$(\Delta - \tau^2)w + \chi_B(x) = e^{-\tau T}(\partial_t u_f(x, T) + \tau u_f(x, T)) \text{ in } \mathbf{R}^3 \setminus \bar{D},$$

$$w = 0 \text{ on } \partial D.$$

この節では, Bistatic data を用いた指示関数

$$\tau \mapsto \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \bar{D}} (f v_g - w_f g) dx$$

を導入する. $f = \chi_B$ および $g = \chi_{B'}$ なので

$$\int_{\mathbf{R}^3 \setminus \bar{D}} (f v_g - w_f g) dx = \int_B v_g dx - \int_{B'} w_f dx$$

と書かれることに注意しよう. $v_g = v_g(x, \tau)$ は (2.6) の B を B' で置き換えた

$$v_g(x, \tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{B'} \frac{e^{-\tau|x-y|}}{|x-y|} dy$$

という形で陽に与えられる.

この節では次の関数が重要な役割を果たす:

$$\phi(x; y, y') = |y - x| + |x - y'|, \quad (x, y, y') \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3.$$

これは, 点 y から x そして x から y' へ至る折れ線の長さを与えると解釈される.

B および B' が $[\bar{B} \cup \bar{B}'] \cap \bar{D} = \emptyset$ を満たすときこれを B と B' は D に関して互いに見える位置にあると呼ぶことにしよう.

定理 3.1([27]). B と B' は D に関して互いに見える位置にあるとせよ. T は次の条件

$$T > \min_{x \in \partial D, y \in B, y' \in B'} \phi(x; y, y'), \quad (3.1)$$

を満たすとせよ. このとき $\tau_0 > 0$ が存在して $\tau \geq \tau_0$ を満たすすべての τ に対して

$$\int_{\mathbf{R}^3 \setminus \bar{D}} (f v_g - w_f g) dx > 0$$

であり, さらに公式

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \log \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \bar{D}} (fv_g - w_fg) dx = - \min_{x \in \partial D, y \in B, y' \in B'} \phi(x; y, y') \quad (3.2)$$

が成り立つ

容易に

$$\min_{x \in \partial D, y \in B, y' \in B'} \phi(x; y, y') = \min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p') - (\eta + \eta')$$

が成り立つことがわかるので $\min_{x \in \partial D, y \in B, y' \in B'} \phi(x; y, y')$ を知ることと $\min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p')$ を知ることとは同値である.

よって (3.2) は p から ∂D 上の点 q そして q から p' に至るあらゆる折れ線のうちでその最短の長さを抽出している. 言い換えれば, (3.2) は, $t = 0$ において p から発した速さが 1 の波が, ∂D の点で反射して p' に最初に到達する時間を抽出する.

これを幾何学的に表現するため 2 点 p および p' を焦点とする回転楕円面の族 $E_c(p, p')$ を考える:

$$E_c(p, p') = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \phi(x; p, p') = c\}.$$

ただし c は $c > |p - p'|$ を満たすパラメータである. いつでも $\min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p') \geq |p - p'|$ が成り立つが, B と B' が D に関して互いに見える位置にある場合, それらの中心 p, p' は $\{p, p'\} \cap \bar{D} = \emptyset$ を満たし, このとき $\min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p') > |p - p'|$ が成り立つことがわかる. よって特に $c = \min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p')$ に対する $E_c(p, p')$ を考えることができる. この回転楕円面は, p と p' を焦点とする回転楕円面でその外部が D を囲むもののうちで最大のものを与える³. (3.2) はこの回転楕円面 $E = E_c(p, p')$ ただし $c = \min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p')$ を bistatic data から抽出する.

証明の概略について述べよう. 証明は, 定数 $\mu_j \in \mathbf{R}$, $C_j > 0 (j = 1, 2)$ および $\tau_0 > 0$ が存在して $\tau \geq \tau_0$ を満たすすべての τ に対して次の二つの評価 (3.3) および (3.4) が成り立つことを確立することでなされる:

$$e^{\tau \min_{x \in \partial D, y \in \partial B, y' \in \partial B'} \phi(x; y, y')} \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \bar{D}} (fv_g - w_fg) dx \leq C_1 \tau^{\mu_1}; \quad (3.3)$$

$$C_2 \tau^{\mu_2} \leq e^{\tau \min_{x \in \partial D, y \in \partial B, y' \in \partial B'} \phi(x; y, y')} \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \bar{D}} (fv_g - w_fg) dx. \quad (3.4)$$

(3.3) は今までの囲い込み法の流れから困難なく証明される. 問題は (3.4) の証明である.

出発点は, D に対する指示関数をより単純な物体 \tilde{D} に対する指示関数で下から評価することである. 具体的には $\phi(q; p, p') = \min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p')$ を満たす $q \in \partial D$ を一つとり D に含まれる開球 \tilde{D} で $q \in \partial \tilde{D}$ および $\min_{x \in \partial \tilde{D}} \phi(x; p, p') = \phi(q; p, p')$ を満たすものを一つとる. ∂D は C^2 と仮定しているのでこれは可能である. そして $\tilde{u} = \tilde{u}_f$ を次の初期境界値

³ これは, [4] で呼ばれている ‘the equi-time of arrival ellipse’ の 3 次元版である.

問題の弱解とする:

$$\partial_t^2 \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = 0 \text{ in } (\mathbf{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}}) \times]0, T[,$$

$$\tilde{u}(x, 0) = 0 \text{ in } \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}},$$

$$\partial_t \tilde{u}(x, 0) = f(x) \text{ in } \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}},$$

$$\tilde{u} = 0 \text{ on } \partial \tilde{D} \times]0, T[.$$

この \tilde{u} に対して

$$\tilde{w}_f(x, \tau) = \int_0^T e^{-\tau t} \tilde{u}(x, t) dt, \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}}, \quad \tau > 0$$

とおく. このとき D に対する指示関数の \tilde{D} に対する指示関数による下からの次の評価を得る:

$$\int_{\mathbf{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}}} (f v_g - w_f g) dx \geq \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}}} (f v_g - \tilde{w}_f g) dx + O(\tau^{-1} e^{-\tau T}).$$

これは自明な次の二つの等式

$$\int_{\mathbf{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}}} f v_g dx = \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}}} f v_g dx, \quad \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}}} \tilde{w}_f g dx = \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}}} \tilde{w}_f g dx$$

および変形 Helmholtz 方程式に対する最大値の原理 ([8]) からの帰結である次の評価

$$\tilde{w}_f - w_f \geq O(\tau^{-1} e^{-\tau T}) \text{ in } \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}}$$

からただちに導かれる.

そこで問題は \tilde{D} に対する指示関数の下からの評価である. まず次の漸近的表現公式を得る.

$$\int_{\mathbf{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}}} (f v_g - \tilde{w}_f g) dx = J_{\tilde{D}}(\tau; f, g) + \int_{\partial \tilde{D}} \frac{\partial \tilde{\epsilon}_f^0}{\partial \nu} v_g dS + O(\tau^{-1} e^{-\tau T}),$$

ここで

$$J_{\tilde{D}}(\tau; f, g) = \int_{\tilde{D}} (\nabla v_f \cdot \nabla v_g + \tau^2 v_f v_g) dx$$

および $\tilde{\epsilon}_\star^0 \in H^1(\mathbf{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}})$, $\star = f, g$ は

$$(\Delta - \tau^2) \tilde{\epsilon}_\star^0 = 0 \text{ in } \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\tilde{D}},$$

$$\tilde{\epsilon}_\star^0 = -v_\star \text{ on } \partial \tilde{D}$$

を満たす.

この第二項の符号は \tilde{D} が一般の場合分らないのであるが, 今の場合 \tilde{D} が凸であることを使うと, 最大値の原理と $\partial \tilde{D}$ の $q \in \partial \tilde{D}$ における ‘reflection argumen’ を適用して

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}_f^0}{\partial \nu}(q) \geq 0, \quad \forall q \in \partial \tilde{D}$$

を得る. よって

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}} (f v_g - w_f g) dx \geq J_{\tilde{D}}(\tau; f, g) + O(\tau^{-1} e^{-\tau T}).$$

したがってすべては $J_{\tilde{D}}(\tau; f, g)$ を下から評価することに帰着される. この $\tau \rightarrow \infty$ における挙動は $f = \chi_B$, $g = \chi_{B'}$ であることを使って [26] における v_f および v_g の漸近挙動を調べた結果を使うと結局積分

$$\int_{\partial \tilde{D}} \frac{(p-x) \cdot \nu_x}{|x-p|^2 |x-p'|} \left(1 + \frac{1}{\tau |x-p|} \right) e^{-\tau \phi(x;p,p')} dS_x$$

の下からの評価を調べることに帰着する. これをそのまま Laplace の方法で解析するのではなく, 部分積分で

$$= \int_{\tilde{D}} \left\{ 1 + \frac{(p-x) \cdot (p'-x)}{|x-p| |x-p'|} \right\} \frac{e^{-\tau \phi(x;p,p')}}{|x-p| |x-p'|} dx$$

という積分の評価に帰着させることができる. ここで大事なものは, B と B' が D に関して (したがって \tilde{D} に関して) 互いに見える位置にあるという条件は,

$$\inf_{x \in \tilde{D}} \left\{ 1 + \frac{(p-x) \cdot (p'-x)}{|x-p| |x-p'|} \right\} > 0$$

を保証することである. この後は困難はないので省略するが, 上の条件の, (3.4) の証明の最終段階における重要な役割が理解されるであろう.

上で述べた (3.4) の証明 (の概略) について二つ注意を与える.

- 証明は ∂D 上の波の境界条件が同次 Dirichlet であることを強く依存している.
- D から \tilde{D} へ帰着させる議論は [35] の Theorem 3.6 および Lemma 3.7 の証明で展開された議論を踏襲したものである. 彼らは sound-soft obstacle に対する散乱核の台の右端点と支持関数との関係を確認した.

3.2 2点間の最初の反射点の抽出

この節では B と B' が互いに見える位置にあるとき, bistatic data から $\min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p')$ を実現するすべての点 $q \in \partial D$ を抽出できることを示そう.

p および p' は $\{p, p'\} \cap \bar{D} = \emptyset$ を満たすとする. 集合

$$\Lambda_{\partial D}(p, p') = \{q \in \partial D \mid \phi(q; p, p') = \min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p')\}$$

を p と p' の間の最初の反射点と呼ぼう. $c = \min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p')$ とおくと $c > |p - p'|$ が成り立ちしたがって

$$\Lambda_{\partial D}(p, p') = \partial D \cap E_c(p, p')$$

と書かれる. この集合は必ずしも有限集合ではなく曲面あるいは曲線の一部を含むこともあり得る.

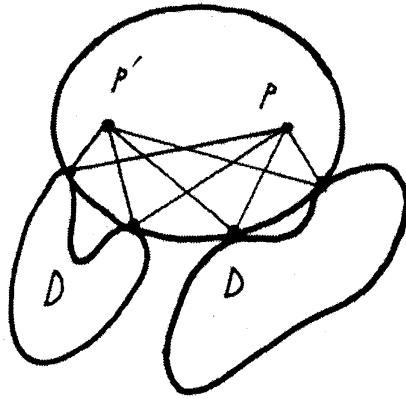


図 2: $\Lambda_{\partial D}(p, p')$ が有限集合である場合の例.

$E_c(p, p')$ 上の点を p' を中心とする極座標で書く. 任意に与えられた方向 $\omega \in S^2$ に対して p' から ω 方向へ半直線を引くと $E_c(p, p')$ と一点で交わる. その点と p' との距離を $s(\omega; p, p')$ と書くと写像 $S^2 \ni \omega \mapsto p' + s(\omega; p, p')\omega \in E_c(p, p')$ が定義されるがこれは全単射である.

次の命題は後方散乱データの場合の命題 2.1 に対応していて, $E_c(p, p')$ 上の任意の点 $p' + s(\omega; p, p')\omega$ が ∂D 上にあるか否かを, 固定した十分小さい正の s に対する $\min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p' + s\omega)$ と $c - s$ の値の比較で判定する方法を与える.

命題 3.1 ([27]). $0 < s < \eta'$ を満たす s を固定する.

(i) もし $p' + s(\omega; p, p', c)\omega$ が ∂D に属するならば, そのとき

$$\min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p' + s\omega) = c - s;$$

(ii) もし $p' + s(\omega; p, p', c)\omega$ が ∂D に属さないならば, そのとき

$$\min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p' + s\omega) > c - s.$$

この命題より $\Lambda_{\partial D}(p, p')$ の特徴づけ

$$\Lambda_{\partial D}(p, p') = \{p' + s(\omega; p, p') \mid \min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p' + s\omega) = c - s, \omega \in S^2\} \quad (3.5)$$

を得る. ただし s は $0 < s < \eta'$ を満たす固定した数である. (2.7) と比較してみるとよいであろう. したがってすべては $\min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p' + s\omega)$ をどう抽出するかである.

簡単に言うと, 波の発生場所は B そのままであるが, 波を観測する場所 B' を B' の中で $p' + s\omega$ を中心とする十分小さい開球に制限することで得られる. 使うデータを狭めればよいのである.⁴

定理 3.2 ([27]). $c = \min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p')$ は既知, B と B' は D に関して互いに見える位置にあるとする. $\overline{B'}$ は $E_c(p, p')$ によって囲まれた領域内にあるとせよ. $0 < s < \eta'$ を満たす

⁴ そのため B' はあまり小さくしてはいけないことになる.

s を固定せよ.⁵ T は

$$T > \sup_{\omega \in S^2} \min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p' + s\omega) - (\eta + \eta' - s) \quad (3.6)$$

を満たすとせよ. このときすべての $q \in \Lambda_{\partial D}(p, p')$ および ν_q を $f = \chi_B$ に対する $B' \times]0, T[$ 上の u_f から抽出できる.

等式

$$\begin{aligned} & \sup_{\omega \in S^2} \min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p' + s\omega) - (\eta + \eta' - s) \\ &= \sup_{\omega \in S^2} \min_{x \in \partial D, y \in B, y' \in B_{\eta' - s}(p' + s\omega)} \phi(x; y, y') \end{aligned}$$

および $B_{\eta' - s}(p' + s\omega) \subset B'$ が成り立つので (3.6) は (3.1) を導くことに注意しよう.

$q \equiv p' + s(\omega; p, p', c)\omega \in \Lambda_{\partial D}(p, p')$ のとき ν_q は $-\{(q - p)/|q - p| + \omega\}$ を正規化したもので与えられる (Snell の法則).

$\Lambda_{\partial D}(p, p')$ を抽出するための手続きをまとめると次の通り.

Step 1. $f = \chi_B$ に対する $B' \times]0, T[$ 上の u_f を観測して B' 上の w_f を計算する.

Step 2. $0 < s < \eta'$ を満たす s を固定する.

Step 3. 方向 $\omega \in S^2$ を選ぶ.

Step 4. 定理 3.1 の公式 (3.2) を $g = \chi_{B_{\eta' - s}(p' + s\omega)}$ に対して適用して $\min_{x \in \partial D, y \in B, y' \in B_{\eta' - s}(p' + s\omega)} \phi(x; y, y')$ を公式

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \log \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \bar{D}} (fv_g - w_fg) dx = - \min_{x \in \partial D, y \in B, y' \in B_{\eta' - s}(p' + s\omega)} \phi(x; y, y')$$

より計算する.

Step 5. 等式

$$\min_{x \in \partial D, y \in B, y' \in B_{\eta' - s}(p' + s\omega)} \phi(x; y, y') = \min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p' + s\omega) - (\eta + \eta' - s)$$

より $\min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p' + s\omega)$ を計算する.

Step 6. Step 5 で計算された数が $\min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p') - s$ に等しければ, (3.5) により $q = p' + s(\omega; p, p', c)\omega \in \Lambda_{\partial D}(p, p')$ である. そうでなければ (3.5) により q は $\Lambda_{\partial D}(p, p')$ に属しないと判定し Step 3 へ行き異なる ω を選んでそれ以降を続ける.

3.3 Bistatic data を用いた指示関数の主要項の抽出

定理 3.2 を得た上はさらに進んで次の問題について考えるのは当然であろう.

積分

$$e^{\tau \min_{x \in \partial D, y \in B, y' \in B'} \phi(x; y, y')} \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \bar{D}} (fv_g - w_fg) dx$$

の $\tau \rightarrow \infty$ における漸近挙動の主要項に D の幾何についてのどんな情報が入っているか?

⁵ η' は B' の半径である.

結果を述べるためにいくつか注意を述べる.

$c = \min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p')$ とおく. $q \in \Lambda_{\partial D}(p, p')$ における ∂D , $E_c(p, p')$ それぞれの接平面は一致する. $S_q(\partial D)$, $S_q(E_c(p, p'))$ でそれぞれ q における ∂D , $E_c(p, p')$ の ν_q に関する Shap operator (あるいは Weingarten map) をあらわす. ただし ν_q は ∂D の外向き単位法線ベクトルで, したがって $E_c(p, p')$ の内向き単位法線ベクトルになっている. この二つの作用素は, q における共通の接空間 $T_q(\partial D) = T_q(E_c(p, p'))$ 上の対称作用素である.

q において $\phi(x; p, p')$ が最小になるということから, q における接空間上の 2 次形式として $S_q(E_c(p, p')) - S_q(\partial D) \geq 0$ が成り立つことがわかる.

次の定理は後方散乱データの場合における定理 2.3 に対応している.

定理 3.3 ([27]). B と B' は D に関して互いに見える位置にあるとする. T は (3.1) を満たすとせよ. $\Lambda_{\partial D}(p, p')$ は有限集合でかつ

$$\det(S_q(E_c(p, p')) - S_q(\partial D)) > 0, \quad \forall q \in \Lambda_{\partial D}(p, p') \quad (3.7)$$

が成り立つとせよ. もし D が凸で ∂D が C^3 ならば, そのとき

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^4 e^{\tau \min_{x \in \partial D, y \in \partial B, y' \in \partial B'} \phi(x; y, y')} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}} (f v_g - w_f g) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{q \in \Lambda_{\partial D}(p, p')} \left(\frac{\text{diam } B}{2|q - p|} \right) \cdot \left(\frac{\text{diam } B'}{2|q - p'|} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\det(S_q(E_c(p, p')) - S_q(\partial D))}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

が成り立つ.

D が凸である場合, 実は $\Lambda_{\partial D}(p, p')$ は一点のみから成る. しかし証明ではこの事実は使わず, 今後の拡張を期待して他の点もあるかのように書いている.⁶

(3.8) の右辺は $p \rightarrow p'$ かつ $p' \rightarrow p$ と置き換えても不変である (reciprocity).

定理 3.3 の証明の概略を述べよう.

核心部分は次の漸近公式の確立である.

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}} (f v_g - w_f g) dx = 2J(\tau; f, g)(1 + O(\tau^{-1/2})) + O(\tau^{-1} e^{-\tau T}). \quad (3.9)$$

これによりすべては積分

$$J(\tau; f, g) = \int_D (\nabla v_f \cdot \nabla v_g + \tau^2 v_f v_g) dx$$

の $\tau \rightarrow \infty$ における漸近挙動を調べることに帰着する. v_f および v_g の挙動 ([26]) から結局次の Laplace 型の積分の漸近挙動に帰着することがわかる:

$$\int_{\partial D} \frac{(p-x) \cdot \nu_x}{|x-p|^2 |x-p'|} \left(1 + \frac{1}{\tau |x-p|} \right) e^{-\tau \phi(x; p, p')} dS_x.$$

これに Laplace の方法 ([2]) を適用すると (3.7) の下で (3.8) が従うことがわかる.

⁶ さらに言うならば, D が凸の場合 $S_q(\partial D) \leq 0$ (ν_q は外向きであることに注意) かつ $S_q(E_c(p, p'))$ は正定値であることから (3.7) は自動的に満たされる. よって (3.7) は, D が凸である場合, 実は不要である.

では (3.9) はどうやって証明されるか、概略を説明しよう。

出発点は部分積分によって得られる次の漸近表現公式である。⁷

$$\int_{\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}} (f v_g - w_f g) dx = J(\tau; f, g) + \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}} (\nabla \epsilon_f^0 \cdot \nabla \epsilon_g^0 + \tau^2 \epsilon_f^0 \epsilon_g^0) dx + O(\tau^{-1} e^{-\tau T}).$$

ここで $\epsilon_\star^0 \in H^1(\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D})$, $\star = f, g$ は

$$(\Delta - \tau^2) \epsilon_\star^0 = 0 \text{ in } \mathbf{R}^3 \setminus \overline{D},$$

$$\epsilon_\star^0 = -v_\star \text{ on } \partial D$$

を満たす。

問題はこの右辺第二項の漸近形であるがそれは次の形で与えられる：

$$\int_{\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}} (\nabla \epsilon_f^0 \cdot \nabla \epsilon_g^0 + \tau^2 \epsilon_f^0 \epsilon_g^0) dx = J(\tau; f, g) (1 + O(\tau^{-1/2})). \quad (3.10)$$

これより (3.9) は直ちに従う。

では (3.10) はどうやって証明するか。これは次の二つの補題から帰結である。

補題 3.1. D は空でない任意の有界な開集合とせよ。 B と B' が D に関して互いに見える位置にあるとせよ。このとき正の定数 C および τ_0 が存在して $\tau \geq \tau_0$ を満たすすべての τ に対して $J(\tau; f, g) > 0$ かつ

$$J(\tau; f, g) \geq C \tau^2 \int_D dx \int_{B \times B'} e^{-\tau \phi(x; y, y')} dy dy'$$

が成り立つ。

この補題の証明の核心部分は次の事実である：条件 $[\overline{B} \cup \overline{B'}] \cap \overline{D} = \emptyset$ は評価

$$\inf_{(x, y, y') \in D \times B \times B'} \left(1 + \frac{y - x}{|y - x|} \cdot \frac{y' - x}{|y' - x|} \right) > 0$$

をもたらす。これを保証する条件が B と B' が D に関して見える位置にあるということである。

次の補題の証明は Lax-Phillips が [35] で展開した二つの reflection argument のうちのひとつ (D のまわりでの reflection と D の凸性を full に利用した最大値原理の組み合わせ) を適用してなされる。

補題 3.2. D は凸かつ ∂D は C^3 であるとせよ。このとき正の定数 C' および τ_0 が存在して $\tau \geq \tau_0$ を満たすすべての τ に対して

$$\left| \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}} (\nabla \epsilon_f^0 \cdot \nabla \epsilon_g^0 + \tau^2 \epsilon_f^0 \epsilon_g^0) dx - J(\tau; f, g) \right| \leq C' \tau^{3/2} \int_D dx \int_{B \times B'} e^{-\tau \phi(x; y, y')} dy dy'$$

が成り立つ。

⁷ この右辺第二項は部分積分で

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \epsilon_f^0}{\partial \nu} v_g dS$$

に等しい。

3.4 Bistatic data を用いた曲率の抽出

この節では定理 3.3 の応用について述べる. 公式 (3.8) を用いていかに ∂D の $\Lambda_{\partial D}(p, p')$ における幾何についての情報を抽出するかが問題である.

ここでは後方散乱データにおける定理 2.4 に対応した結果を述べるが, 現時点では残念ながら一般の物体ではなく凸な物体についての結果である.

次の定理は, $q \in \Lambda_{\partial D}(p, p')$ が既知であるとして (したがって $c = \min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p')$ も既知), q における ∂D の Gauss 曲率および付加項のついた平均曲率を bistatic data から抽出できることを主張する.

定理 3.4([27]). $q \in \Lambda_{\partial D}(p, p')$ および $c = \phi(q; p, p')$ は既知であるとせよ. T は (3.1) を満たすとせよ. B と B' は D に関して互いに見える位置にあるとせよ. D は凸および ∂D は C^3 とせよ. このとき $K_{\partial D}(q)$ および

$$H_{\partial D}(q) = \frac{S_q(\partial D)(A_q(p) \times A_q(p')) \cdot (A_q(p) \times A_q(p'))}{2(1 + A_q(p) \cdot A_q(p'))} \quad (3.11)$$

を $f = \chi_B$ に対する $B' \times]0, T[$ 上の u_f から抽出できる. ここに

$$A_q(x) = \frac{q - x}{|q - x|}$$

である.

(3.11) において, $A_q(p) \times A_q(p')$ は ∂D の q における接空間に属していることに注意しよう.

定理 3.4 は, ∂D の q における幾何を, bistatic data を使って抽出するに当たって次の二つの示唆を与えている.

- もし p と p' の間の最初の反射点において物体表面の平均曲率を出来るだけ精密に抽出したければ, p と p' は出来るだけ近接させたほうが良い. なぜならこのとき, $A_q(p) \times A_q(p')$ は 0 ベクトルに近くなりしたがって (3.11) の第二項は無視され得るであろうから.
- 一方 Gauss 曲率については, B と B' が D に関して見える位置にある限り, いつでも抽出できる.

定理 3.4 の証明の概略を述べよう.

アイデアは, B' における受信データをすべて使うのではなく, p' から B' 内を $(q-p)/|q-p|$ 方向へ少し進んだ 2 点それぞれを中心とした B' 内の十分小さい開球で観測された波のみを使うことにある.

そして詳細は略するが (図 3 を参照), 定理 3.3 を使って, 結果として次の二つの数を得る:

$$\det(S_q(E_{c-s}(p, p' + sA_q(p')))) - S_q(\partial D)), s = s_1, s_2.$$

ここで s_1, s_2 は正の十分小さい固定した数である. (2.14) に対応する等式を使うとこれらは $K_{\partial D}(q)$ および (3.11) に対する一意可解な連立一次方程式になっておりしたがって定理 3.4 が従う.

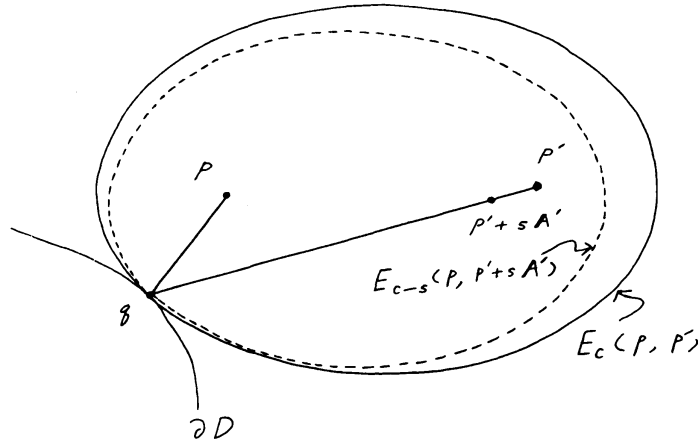


図 3: $A' = A_q(p')$. $E_{c-s}(p, p' + sA')$ は $E_c(p, p')$ と一点 q のみで交わりかつ法線を共有している.

3.5 球状物体の再構成公式

次の定理は、球状物体の一組の bistatic data からの再構成公式を与えるものでありしたがって一意性定理の構成的証明 (一意接続定理を全く使用していないという意味で) になっている.

定理 3.5([27]). D は開球であるとせよ. T は (3.6) を満たし, B と B' は D に関して互いに見える位置にあるとせよ. このとき D そのものを $f = \chi_B$ に対する $B' \times]0, T[$ 上の u_f から抽出できる.

D を再構成する手続きは次の通りである.

Step 1. 定理 3.1 を使って $c = \min_{x \in \partial D} \phi(x; p, p')$ 抽出する.

Step 2. 定理 3.2 を使って $\Lambda_{\partial D}(p, p')$ に属する q および ν_q を抽出する.

Step 3. 定理 3.4 を使って $K_{\partial D}(q)$ を抽出する.

D の中心は $q - (1/\sqrt{K_{\partial D}(q)})\nu_q$ そして半径は $1/\sqrt{K_{\partial D}(q)}$ に等しいので D が bistatic data を用いて再構成されたことになる.

物体が球であるとしてそれを再構成する問題は周波数領域においても考察されている. 例えば球面波を入射波として低周波極限を使用した [1] を参照されたい.

筆者は有限観測時間内に得られた bistatic data を用いた球状物体のこのような一意性定理を他に知らない. 双曲型方程式に対する逆問題についてさまざまな一意性定理については [33, 34, 40, 41] を参照されたい.

4 今後の問題

筆者が関心を持っている問題についてそのいくつか述べよう.

1. まずは定理 3.3 において D の凸性を外すこと. 凸性は e_f^0 の D の近くでの各点評価を最大値の原理を使用して示すのに使われるので, それを使わない評価の方法を考える必要がある.

2. B と B' が D によって遮られている場合すなわち $[\overline{B \cup B'}] \cap \overline{D} \neq \emptyset$ のときはどうなるか?

3. 1 にも関係するが他の境界条件に対して定理 2.3, 3.3 における公式に対応する結果を導くこと. 例えば $\partial u / \partial \nu - \gamma \partial_t u - \beta u = 0$ on ∂D ($\gamma = \gamma(x) \geq 0$) あるいは memory type についてはどうか (さまざまな境界条件のもとでの順問題については [38]).

4. 他の方程式 $\alpha(x) \partial_t^2 u - \Delta u = 0$ ($B = B'$ の場合について定理 2.1 に相当する結果は [25]), $\partial_t^2 u - \nabla \cdot \gamma \nabla u = 0$ ($B = B'$ の場合について定理 2.1 に相当する結果は [20, 25]) あるいは Maxwell 方程式系について展開すること.

5. 既知の物体 (例えば球) の裏側にある未知の物体についての情報をその反対側において発生させた波を同じ側で有限時間観測して得られたデータから抽出できるか? これは, 水平線を越えて向こう側にある物体をこちら側で送受信した波を用いて探知する方法を見出す問題である. 筆者は, この問題に対してここで展開した囲い込み法が有効であると確信している.⁸

6. 既知の 2 層の媒質があり下層に未知の物体があるとする. 上層で波を発生させ下層に波を送り物体からの反射波を上層で有限時間観測して得られたデータから物体についての幾何を抽出すること.

時間依存のデータを用いた囲い込み法はさまざまな応用が期待されるが, 他の問題における展開については [18, 19, 24, 29, 31, 32] を参照されたい.

謝辞

この研究は日本学術振興会科学研究費 (C)(No.21540162) 「偏微分方程式に対する逆問題の探針法および囲い込み法による研究」(研究代表者 池畠 優) の援助を受けている.

⁸ 筆者は, RIMS 研究集会「偏微分方程式の逆問題解析とその周辺分野に関する研究」(研究代表者 磯崎 洋) における「Inverse obstacle scattering with dynamical data over a finite time interval」という題名での講演 (2012 年 1 月 24 日) で, この問題を囲い込み法の理論における解決すべき問題として言及した.

参考文献

- [1] Athanasiadis, C., Martin, P. A. and Stratis, I. G., On spherical-wave scattering by a spherical scatterer and related near-field inverse problems, *IMA J. Appl. Math.*, **66**(2001), 539-549.
- [2] Bleistein, N. and Handelsman, R. A., Asymptotic expansions of integrals, Dover Publications, New York, 1986.
- [3] Burkholder, R.J., Gupta, I.J. and Johnson, J.T., Comparison of monostatic and bistatic radar images, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, **45**(2003), No. 3, 41-50.
- [4] Cox, H., Fundamentals of bistatic active sonar, in *Underwater acoustic data processing*, Chan Y. T. (Ed.), 1989, 3-24. Kluwer Academic Publishers.
- [5] Dautray, R. and Lions, J-L., Mathematical analysis and numerical methods for sciences and technology, *Evolution problems I*, Vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [6] Elschner, J. and Yamamoto, M., Uniqueness in determining polyhedral sound-hard obstacles with a single incoming wave, *Inverse Problems*, **24**(2008), 035004(7pp).
- [7] Georgiev, V. and Arnaoudov, Ya., Inverse scattering problem for dissipative wave equation, *Integral Equations and Inverse Problems*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **235**, 86-89, Longman, 1991.
- [8] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., Elliptic partial differential equations of second order, second.ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
- [9] Ikehata, M., Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data, *Inverse Problems*, **15**(1999), 1231-1241.
- [10] Ikehata, M., How to draw a picture of an unknown inclusion from boundary measurements. Two mathematical inversion algorithms, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, **7**(1999), 255-271.
- [11] Ikehata, M., Reconstruction of the support function for inclusion from boundary measurements, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, **8**(2000), 367-378.
- [12] 池畠 優, 不連続面の観測データによる再構成の数値 – 境界値逆問題, 逆ソース問題および逆散乱問題における再構成公式, 都立大学数学教室セミナー報告, 2000.
- [13] Ikehata, M., Complex geometrical optics solutions and inverse crack problems, *Inverse Problems*, **19**(2003), 1385-1405.
- [14] Ikehata, M., Inverse scattering problems and the enclosure method, *Inverse Problems*, **20**(2004), 533-551.

- [15] Ikehata, M., The Herglotz wave function, the Vekua transform and the enclosure method, *Hiroshima Math. J.*, **35**(2005), 485-506.
- [16] Ikehata, M., Two sides of probe method and obstacle with impedance boundary condition, *Hokkaido Math. J.*, **35**(2006), 659-681.
- [17] Ikehata, M., Extracting discontinuity in a heat conductive body. One-space dimensional case, *Appl. Anal.*, **86**(2007), no. 8, 963-1005.
- [18] Ikehata, M., An inverse source problem for the heat equation and the enclosure method, *Inverse Problems*, **23**(2007), 183-202.
- [19] Ikehata, M., Two analytical formulae of the temperature inside a body by using partial lateral and initial data, *Inverse Problems*, **25**(2009) 035011(21pp).
- [20] Ikehata, M., The enclosure method for inverse obstacle scattering problems with dynamical data over a finite time interval, *Inverse Problems*, **26**(2010) 055010(20pp).
- [21] Ikehata, M., A note on the enclosure method for an inverse obstacle scattering problem with a single point source, *Inverse Problems*, **26**(2010) 105006(17pp).
- [22] Ikehata, M., The probe and enclosure methods for inverse obstacle scattering problems. The past and present., in *New Development of Functional Equations in Mathematical Analysis*, RIMS Kokyuroku, No. **1702**, 1-22, 2010.
- [23] Ikehata, M., Inverse obstacle scattering problems with a single incident wave and the logarithmic differential of the indicator function in the enclosure method, *Inverse Problems*, **27**(2011) 085006(23pp).
- [24] Ikehata, M., The framework of the enclosure method with dynamical data and its application, *Inverse Problems*, **27**(2011) 065005(16pp).
- [25] Ikehata, M., The enclosure method for inverse obstacle scattering problems with dynamical data over a finite time interval: II. Obstacles with a dissipative boundary or finite refractive index and back-scattering data, *Inverse Problems*, **28**(2012) 045010(29pp).
- [26] Ikehata, M., An inverse acoustic scattering problem inside a cavity with dynamical back-scattering data, *Inverse Problems*, **28**(2012) 095016(24pp).
- [27] Ikehata, M., The enclosure method for inverse obstacle scattering problems with dynamical data over a finite time interval : III. Sound-soft obstacle and bistatic data, *submitted*, 2013. arXiv:1302.2389.
- [28] Ikehata, M. and Itou, H., Extracting the support function of a cavity in an isotropic elastic body from a single set of boundary data, *Inverse Problems*, **25**(2009) 105005(21pp).

- [29] Ikehata, M. and Itou, H., On reconstruction of a cavity in a linearized viscoelastic body from infinitely many transient boundary data, *Inverse Problems*, **28**(2012) 125003(19pp).
- [30] Ikehata, M., Niemi, E. and Siltanen, S., Inverse obstacle scattering with limited-aperture data, *Inverse Probl. Imaging*, **6**(2012), No.1, 77-94.
- [31] Ikehata, M. and Kawashita, M., The enclosure method for the heat equation, *Inverse Problems*, **25**(2009) 075005(10pp).
- [32] Ikehata, M. and Kawashita, M., On the reconstruction of inclusions in a heat conductive body from dynamical boundary data over a finite time interval, *Inverse Problems*, **26**(2010) 095004(15pp).
- [33] Isakov, V., On uniqueness for a discontinuity surface of the speed of propagation, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, **4**(1996), 33-38.
- [34] Isakov, V., *Inverse problems for partial differential equations (Second Edition)*, Springer, New York, 2006.
- [35] Lax, P. D. and Phillips, R. S., The scattering of sound waves by an obstacle, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **30**(1977), 195-233.
- [36] Majda, A., High frequency asymptotics for the scattering matrix and the inverse problem of acoustic scattering, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **29**(1976), 261-291.
- [37] Majda, A., A representation formula for the scattering operator and the inverse problem for arbitrary bodies, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **30**(1977), 165-194.
- [38] Propst, G. and Prüss, J., On wave equations with boundary dissipation of memory type, *Integral Equations Appl.*, **8**(1996), no.1, 99-123.
- [39] Petkov, V. and Stoyanov, L., Sojourn times, singularities of the scattering kernel and inverse problems, *Inside Out: Inverse Problems*, MSRI Publications, **47**, 2003, 297-332.
- [40] Rakesh, An inverse impedance transmission problem for the wave equation, *Comm. in partial differential equations*, **18**(1993), 583-600.
- [41] Rakesh, Some results on inverse obstacle problems for the wave equation, *Algebra i Analiz*, **8**(1996), no.2, 157-161.
- [42] Sini, M. and Yoshida, K., On the reconstruction of interfaces using complex geometrical optics solutions for the acoustic case, *Inverse Problems*, **28**(2012) 055013.
- [43] Zhou, T., Reconstructing electromagnetic obstacles by the enclosure method, *Inverse Probl. Imaging*, **4**(2010), 547-569.